REPÚBLICA PORTUGUESA | EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

Agrupamento de Escolas João da Silva Correia

PLANIFICAÇÃO – Ensino Secundário

2026 - 2027

Matemática A /12.º Ano

GESTÃO DO TEMPO

1º SEMESTRE		Nº de tempos	2º SEMESTRE		Nº de tempos
	Apresentação	1			
	Desenvolvimento das aprendizagens essenciais*	98		Desenvolvimento das aprendizagens essenciais*	85
	Momentos de avaliação formal **	11		Momentos de avaliação formal**	11
	TOTAL	110		TOTAL	96

* No desenvolvimento das aprendizagens essenciais, **em articulação com o perfil dos alunos poderão estar incluídos D.A.C e a consolidação/lecionação das aprendizagens de anos letivos anteriores.**

** O desenvolvimento das aprendizagens integra avaliação contínua e discrimina-se o número mínimo de tempos para momentos de avaliação formal. Estes tempos contemplam momentos para correção de avaliação formal.

GESTÃO DAS APRENDIZAGENS

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
1ºSem	**9**	**NÚMEROS COMPLEXOS** • Números complexos na forma algébrica • Unidade imaginária • Forma algébrica • Conjugado e módulo de um número complexo • Igualdade de complexos • Operações elementares com números complexos na forma algébrica	• Contextualizar historicamente a origem dos números complexos. • Identificar a unidade imaginária e o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. • Resolver equações do 2.º grau, de coeficientes reais, quando não existem raízes reais. • Representar números complexos na forma algébrica, identificando parte real, parte imaginária, módulo e conjugado, bem como números imaginários puros em $\mathbb{C}$. • Estabelecer a igualdade de números complexos na forma algébrica. • Efetuar operações elementares com números complexos na forma algébrica (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação).	• Estimular a pesquisa na internet sobre a evolução do conceito de número, desde os números naturais até à formalização dos números complexos. • Sugerir a adaptação do programa efetuado em Python para a resolução de equações do 2.º grau, incorporando números complexos. • Chamar a atenção de que o conjunto dos números reais é um subconjunto do conjunto dos números complexos. • Salientar que este conjunto permite obter soluções para equações do 2.º grau que são impossíveis em $\mathbb{R}$, sendo que não é possível definir relações de ordem entre dois complexos. • Conduzir o aluno a verificar que existem equações do 3.º grau (de coeficientes reais) que têm uma, duas ou três soluções em $\mathbb{C}$, sendo que pelo menos uma delas é sempre real e as outras duas se complexas são conjugadas.	• Conhecedor/ sabedor/ culto/ informado (A, B, G, I, J) • Criativo (A, C, D) • Crítico/Analítico (A, B, C, D, G) • Indagador/ Investigador (C, D, F, H, I) • Respeitador da diferença/ do outro (A, B, E, F, H) • Sistematizador/ organizador (A, B, C, I, J) • Questionador (A, F, G, I, J) • Comunicador

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
	16	• Representação de complexos no plano de Argand-Gauss **Números complexos na forma trigonométrica** • Forma trigonométrica	• Representar números complexos no plano de Argand-Gauss e identificar números complexos a partir das suas imagens geométricas. • Representar números complexos na forma trigonométrica. • Estabelecer a igualdade de dois números complexos na forma trigonométrica, bem como comparar números complexos cujas imagens geométricas estão em posições simétricas em relação ao eixo real, ao eixo imaginário ou à origem.	• Salientar que dois complexos são iguais se coincidem, respetivamente, nas suas partes reais e imaginárias. • Realçar que nas operações elementares entre números complexos se mantém a generalidade das propriedades das operações definidas em $\mathbb{R}$. • Sugerir a construção geométrica dos pontos correspondentes à soma e ao produto de dois números complexos, utilizando ferramentas tecnológicas. • Salientar que um número complexo na forma trigonométrica pode ser representado por $\rho . e^{i\theta}$, em que $e^{i\theta} = cos\ \theta + i\ sen\ \theta$, ρ é o módulo ($\rho > 0$) e θ o argumento do complexo (argumento principal se $\theta \in]-\pi, \pi]$, ou argumento não negativo mínimo se $\theta \in [0, 2\pi[$). • Realçar a equação de Euler, $e^{i\pi} + 1 = 0$, por envolver os cinco símbolos mais importantes da matemática (1,0, π, e, i).	

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
		• Operações com números complexos na forma trigonométrica	• Efetuar operações com números complexos na forma trigonométrica (multiplicação, divisão, potenciação e radiciação). • Resolver equações simples em $\mathbb{C}$.	• Levar os alunos a verificar que dois números complexos são iguais se tiverem o mesmo módulo e o seu argumento diferir em $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. • Fomentar a obtenção de números complexos na forma trigonométrica resultantes de operações entre complexos (potenciação e radiciação), evidenciando a sua interpretação geométrica (casos simples).	
		• Conjuntos definidos por condições na variável complexa	• Caracterizar domínios planos através de condições na variável complexa e vice-versa.	• Propor a identificação de condições na variável complexa que representam regiões do plano complexo e vice-versa (circunferências, círculos, semirretas, retas e semiplanos).	
		FUNÇÕES I			
	3	• Função inversa	• Conhecer as raízes de índice natural, nomeadamente, a radiciação de índice natural como inversa da potenciação de expoente natural. • Identificar funções invertíveis e não invertíveis, nomeadamente recorrendo aos gráficos das funções e ao "teste da reta horizontal" e à sua formulação algébrica, em casos simples.	• Retomar o conceito de raízes quadradas e cúbicas desenvolvido no ensino básico. • Mencionar a relação entre as potências de expoente fracionário e as raízes de índice natural: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, $a > 0$, $q \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}$.	• Conhecedor/ sabedor/ culto/ informado (A, B, G, I, J) • Criativo (A, C, D) • Crítico/Analítico (A, B, C, D, G) • Indagador/ Investigador

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
			• Estabelecer as relações entre o domínio e o contradomínio de funções inversas, bem como a simetria das respetivas representações gráficas, relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.	• Estudar a função quadrática como exemplo de função não invertível no seu domínio. • Propor a formulação algébrica do "teste da reta horizontal" para identificar funções inversas, ou restrições do domínio onde a função é invertível. • Promover a utilização da tecnologia para estudar funções invertíveis e comparar gráficos de funções com os das suas inversas. Por exemplo, determinar a imagem pela reflexão em relação à reta $y = x$ de funções diversas (polinomiais, racionais e exponenciais), em casos simples, e encontrar a expressão algébrica das funções obtidas, caso existam.	(C, D, F, H, I) • Respeitador da diferença/ do outro (A, B, E, F, H) • Sistematizador/ organizador (A, B, C, I, J) • Questionador (A, F, G, I, J) • Comunicador
	2	• Função composta	• Conhecer e aplicar a função composta, em casos simples, analisando o seu domínio.	• Recorrer a exemplos simples para estudar casos de funções compostas em que se evidencie eventuais alterações aos seus domínios.	
	6	• Função exponencial	• Identificar função exponencial, como função do tipo $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+$ que verifica as propriedades:	• Retomar o estudo das regras operatórias das potências feito no ensino básico.	

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
	13	• Função logarítmica	$a^0 = 1$, $1^x = 1$, $a^x . a^y = a^{x+y}$, $a^x . b^x = (a.b)^x$, $a^{-x} = (1/a)^x = 1/a^x$, $a^x / a^y = a^{x-y}$, $a^x / b^x = (a/b)^x$, $(a^x)^y = a^{x.y}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$. • Identificar, em funções do tipo $f(x) = b.a^{x-c} + d$, $a \in \mathbb{R}^+$, $c, d \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, domínio, contradomínio, coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados, monotonia e comportamento quando x tende para mais infinito e menos infinito. • Resolver, graficamente, equações envolvendo funções exponenciais em contexto de resolução de problemas. • Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial com a mesma base. • Estudar intuitivamente, com recurso à tecnologia, o comportamento de funções com logaritmos.	• Apresentar a função exponencial num contexto de resolução de problemas de crescimento e decrescimento exponencial, como por exemplo o crescimento de bactérias, o arrefecimento de um café e o decaimento radioativo. • Promover a resolução gráfica de equações envolvendo funções exponenciais. • Propor a resolução de problemas de modelação que envolvam a função exponencial, como por exemplo o cálculo da taxa de juro anual nominal, ou que envolvam a função logística, por exemplo o crescimento de uma população limitado pela capacidade de carga do meio. • Propor a exploração de modelos exponenciais e conduzir os alunos na identificação da relação inversa.	

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
			• Conhecer e aplicar as propriedades e regras operatórias dos logaritmos, em casos simples, e em contexto de resolução de problemas e de modelação. • Resolver equações, envolvendo funções exponenciais e funções logarítmicas, em contexto de resolução de problemas, tanto analiticamente como graficamente.	• Promover a utilização das propriedades e regras operatórias dos logaritmos, incluindo a fórmula da mudança de base. • Referir as escalas logarítmicas na medição de certas grandezas, como por exemplo o pH de uma solução, a magnitude do som em decibéis, ou a escala logarítmica usada na medição da acuidade visual. • Promover a resolução de problemas e a modelação, com tecnologia ou analiticamente, que envolvam a função exponencial e a função logarítmica.	
		11.º Ano **FUNÇÕES**			
	20	• Cálculo diferencial ○ Taxa de variação ○ Derivada	• Determinar a taxa média de variação de uma função num intervalo $[a,b]$ e fazer a sua interpretação geométrica. • Determinar a razão incremental de uma função num dado ponto e chegar à taxa de variação instantânea através da noção intuitiva de limite.	• Introduzir a noção de taxa média de variação, incluindo exemplos como a velocidade média do movimento retilíneo de um corpo entre dois instantes. • Promover a interpretação geométrica da taxa média de variação de uma	• Conhecedor/ sabedor/ culto/ informado (A, B, G, I, J) • Criativo (A, C, D) • Crítico/Analítico (A, B, C, D, G)

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
		○ Função derivada ○ Regras de derivação ○ Otimização	• Identificar a derivada de uma dada função num ponto com o declive da reta tangente ao gráfico nesse ponto. • Conhecer a definição de função derivada. • Calcular a derivada de monómios, de grau não superior a 3, utilizando o limite da razão incremental de uma função num ponto genérico. • Aplicar regras de derivação (adição, subtração, multiplicação, divisão, potências com expoente natural) para obter a função derivada. • Reconhecer, numérica e graficamente, a relação entre o sinal da derivada e a monotonia de uma função. • Saber que se uma dada função definida num intervalo aberto tem extremo num ponto e tem derivada nesse ponto então essa derivada é nula (teorema de Fermat). • Estudar a monotonia e existência de extremos de uma função com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, tendo por base o sinal e os zeros da sua derivada.	função no intervalo $[a,b]$ (declive do segmento de reta entre dois pontos). • Apresentar a noção de taxa de variação instantânea utilizando tabelas construídas com recurso à tecnologia. • Promover a utilização da noção intuitiva e informal de limite para obter a taxa de variação instantânea, em casos simples. • Guiar os alunos na escrita e interpretação do conceito de derivada enquanto taxa de variação instantânea, aliado à noção de declive da reta tangente ao gráfico num ponto. • Salientar que a função derivada resulta da determinação da derivada num ponto genérico do domínio. • Promover a derivação de monómios de grau não superior a 3, utilizando a definição de derivada num ponto genérico e num ponto específico. • Apresentar as regras de derivação da adição, subtração, multiplicação, divisão e potências com expoente natural.	• Indagador/ Investigador (C, D, F, H, I) • Respeitador da diferença/ do outro (A, B, E, F, H) • Sistematizador/ organizador (A, B, C, I, J) • Questionador (A, F, G, I, J) • Comunicador

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
	22	**12.º Ano** **FUNÇÕES II** • Derivadas ○ Derivada da função exponencial de base e ○ Derivada da função Logarítmica de base e	• Resolver problemas de otimização de modelação matemática, em casos simples, no contexto da vida real. • Identificar o número e (número de Euler) como a única base da função exponencial em que o seu gráfico coincide com o gráfico da respetiva função derivada. • Conhecer a derivada da função $f(x) = e^x$ • Identificar $g(x) = lnx$ como a função inversa de $f(x) = e^x$. • Saber relacionar geometricamente a derivada da função logarítmica com a derivada da função exponencial, tendo por base a simetria das retas tangentes aos gráficos em pontos simétricos, relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.	• Promover a comparação entre o gráfico da função e o gráfico da sua derivada recorrendo quer à tecnologia gráfica, quer a processos analíticos para a construção de quadros de variação de sinal e zeros da derivada. • Propor a resolução de problemas de otimização em contexto de modelação. • Promover a utilização da tecnologia para representar funções da família $f(x) = a^x$, $a \in [2,3]$ e respetivas derivadas (calculadas usando funções específicas da tecnologia para derivadas ou tangentes ao gráfico) e verificar que só existe um valor de a para o qual a função e a sua derivada coincidem. • Fazer referência ao trabalho pioneiro de Euler, o primeiro a estudar de forma sistemática o número e, que provou ser irracional. • Ilustrar a determinação da derivada de $g(x) = lnx$, através da construção seguinte, usando tecnologia gráfica:	• Conhecedor/ sabedor/ culto/ informado (A, B, G, I, J) • Criativo (A, C, D) • Crítico/Analítico (A, B, C, D, G) • Indagador/ Investigador (C, D, F, H, I) • Respeitador da diferença/ do outro (A, B, E, F, H)

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos

		○ Regras de derivação
		
		○ Problemas de otimização
		
		○ Segunda derivada
		
		○ Concavidades e pontos de inflexão
			• Conhecer a derivada da função $g(x) = ln\ x$
			
			• Conhecer o teorema da derivada da função composta (Regra da Cadeia).
			
			• Conhecer as regras de derivação para funções do tipo:
			  • $f(x) = x^{\alpha}$ (com α real e $x > 0$);
			  • $f(x) = a^{x}$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$);
			  • $f(x) = log_a^x$ (com $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$);
			  • $f(x) = sen(x)$, $f(x) = cos(x)$ e $f(x) = tg(x)$
			
			• Determinar derivadas envolvendo operações com as funções estudadas anteriormente, em casos simples.
			
			• Resolver problemas de otimização tendo por base funções deriváveis.
			
			• Determinar a segunda derivada de funções polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
			
			• Relacionar o sinal e os zeros da segunda derivada com o sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de uma função.
				1. Construir a representação gráfica de $f(x) = e^{x}$ e, por meio de uma simetria relativa à bissetriz dos quadrantes ímpares, obter o gráfico da função $g(x) = lnx$;
				2. Marcar um ponto de coordenadas $(x, g(x))$ e o seu simétrico relativamente à reta $y = x$;
				3. Traçar a reta tangente ao gráfico de g em $(x, g(x))$ e, por simetria, traçar a tangente ao gráfico de f em $(g(x), x)$;
				4. Verificar que o produto dos declives das retas tangentes é igual a 1, qualquer que seja x;
				5. Observar que o declive da tangente ao gráfico de f em $(g(x), x)$ é x, porque $(e^{x})' = e^{x}$;
				6. Concluir que o declive da tangente ao gráfico de g em $(x, g(x))$ é $1/x$, ou seja $(ln\ x)' = 1/x$
				
				• Dar a conhecer e promover a utilização das regras de derivação, sem demonstrar, das funções $f(x)=x^{\alpha}$, $f(x) = a^{x}$, $f(x) = \log_a x$ e de funções trigonométricas.
				
				• Promover a aplicação do teorema da derivada da função composta, generalizando as fórmulas de derivação conhecidas.
					• Sistematizador/ organizador (A, B, C, I, J)
					
					• Questionador (A, F, G, I, J)
					
					• Comunicador

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
	7	• Funções contínuas e deriváveis ○ Continuidade	• Reconhecer uma função contínua num ponto do seu domínio como uma função	• Promover a resolução de problemas de otimização envolvendo funções deriváveis já estudadas, num contexto de modelação matemática. • Propor o cálculo da segunda derivada de funções. Só estão incluídas nestas **Aprendizagens Essenciais** situações de cálculo algébrico da segunda derivada de funções cujo grau de dificuldade não ultrapasse o dos seguintes exemplos: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$, $g(x) = x^2 . \ln x$ e $h(x) = e^x / x$. • Promover o estudo de funções, incluindo o sentido das concavidades e os pontos de inflexão em intervalos onde as funções têm segunda derivada. • Nos problemas de otimização e no cálculo de pontos de inflexão do gráfico de uma função é proposto que o trabalho com os alunos se restrinja a funções polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas e operações entre estas. • Retomar a utilização da noção intuitiva e informal de limite num ponto, no estudo da continuidade.	

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
2ºSem			que admite limite nesse ponto igual à sua imagem. • Identificar se uma função é contínua num intervalo aberto, em casos simples, tendo como apoio o conhecimento de uma lista de funções contínuas e respetivas operações.	• Dar a conhecer aos alunos a seguinte lista de funções contínuas: - Funções polinomiais; - Funções exponenciais e logarítmicas; - Funções trigonométricas. *Incluir nesta lista as funções obtidas a partir de funções contínuas, através das operações:* - Soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas; - Composição de funções contínuas. • Alertar para a existência de outras funções contínuas não contempladas na lista anterior. • Alertar para a existência de funções descontínuas num intervalo aberto. Analisar alguns modelos de funções descontínuas como por exemplo: tarifários de estacionamento, escalões do IRS, a força exercida pelo propulsor de um foguete após o seu lançamento.	
	8	• Funções contínuas e deriváveis (cont.) ○ Regra de L'Hôpital	• Estudar o limite de funções que conduzem a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, aplicando a Regra de L'Hôpital, usando limites notáveis ou técnicas de cálculo simples.	• Informar os alunos das propriedades operatórias dos limites (adição, subtração, multiplicação e divisão). • Promover o estudo de indeterminações para comparar magnitudes de funções	• Conhecedor/ sabedor/ culto/ informado (A, B, G, I, J) • Criativo (A, C, D)

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
				quando a variável independente se aproxima de um ponto específico ou do infinito. • Alertar os alunos para as condições em que não é possível aplicar a Regra de L'Hôpital e para os casos em que não é aconselhável o seu uso. • Propor a construção de uma tabela de limites notáveis, recorrendo à regra de L'Hôpital, nomeadamente: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1;\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1;$ $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a x}{x^p}=0;\lim_{x\to 0}\frac{a^x}{x^p}=+\infty\ (a>1\ e\ p\in IN).$	• Crítico/Analítico (A, B, C, D, G) • Indagador/ Investigador (C, D, F, H, I) • Respeitador da diferença/ do outro (A, B, E, F, H) • Sistematizador/ organizador (A, B, C, I, J) • Questionador (A, F, G, I, J) • Comunicador
	8	○ Assíntotas	• Determinar analiticamente as equações das assíntotas, verticais e não verticais, ao gráfico de uma função.	• Propor aos alunos a determinação das assíntotas verticais e não verticais ao gráfico de uma função. Só estão incluídas nestas Aprendizagens Essenciais situações de cálculo algébrico das equações das assíntotas do gráfico de funções cujo grau de dificuldade não ultrapasse o dos seguintes exemplos: $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+1}$; $g(x)=\frac{e^x}{x+1}$ e $h(x)=x+\ln x$	
	8	○ Estudo de funções	• Resolver problemas, envolvendo o estudo de funções, complementando o uso da tecnologia com o estudo analítico.	• Incentivar o estudo das funções, combinando as ferramentas analíticas com a tecnologia gráfica, identificando	

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
	12	• Resolução aproximada de equações ○ Teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy) ○ Método da Bisseção ○ Método de Newton-Raphson	• Conhecer o teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy). • Conhecer e aplicar o método da Bisseção. • Conhecer e aplicar o método de Newton-Raphson.	na representação gráfica obtida as características resultantes de processos analíticos. • Proporcionar oportunidades para compreender que as representações gráficas apresentadas pela tecnologia podem, por vezes, não corresponder com rigor ao gráfico da função em estudo. • No estudo de funções, nestas Aprendizagens Essenciais, só está incluído o trabalho com funções polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas e operações entre estas. • Considerar o teorema dos valores intermédios para funções contínuas em intervalos abertos que contenham o intervalo fechado onde se estudam os valores intermédios. • Apresentar como objetivo a resolução por métodos aproximados de qualquer equação, tendo em conta que existem muitas situações em que não é possível obter uma solução expressa em termos das funções já estudadas.	

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
	2	**PROBABILIDADE** • Fenómeno aleatório ○ Experiência aleatória ○ Espaço de resultados ou espaço amostral ○ Modelo de probabilidade Acontecimentos ○ União e interseção de acontecimentos	• Distinguir entre fenómeno aleatório e não aleatório (determinístico). • Compreender que as realizações individuais de um fenómeno aleatório são incertas, mas existe um padrão genérico de comportamento, recorrendo-se à Teoria da Probabilidade para construir modelos matemáticos que descrevam a regularidade estatística observada numa longa série de repetições do fenómeno. • Compreender que: - À realização de um fenómeno aleatório se dá o nome de experiência aleatória;	• Promover o uso sistemático da tecnologia na aplicação dos diferentes métodos considerados para a obtenção aproximada de soluções de equações. • Propor a elaboração de programas em Python para implementar os métodos de Newton-Raphson e da Bisseção. • Ilustrar a partir de um exemplo concreto a interpretação geométrica do método de Newton-Raphson. • Recorrer a situações em contextos variados, para sensibilizar os alunos para a existência destes fenómenos, nomeadamente através de exemplos de fenómenos físicos, com leis determinísticas (movimento de um carro; queda de uma maçã do alto de uma torre) e de exemplos de fenómenos que se podem considerar aleatórios pela dificuldade em arranjar uma lei física para os descrever (número de irmãos de um aluno da escola, escolhido ao acaso; face do dado que fica virada para cima quando se lança; temperatura máxima a observar numa data futura).	• Conhecedor/ sabedor/ culto/ informado (A, B, G, I, J) • Criativo (A, C, D) • Crítico/Analítico (A, B, C, D, G) • Indagador/ Investigador (C, D, F, H, I)

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
	8	• Probabilidade ○ Probabilidade frequencista	- Ao conjunto S de resultados possíveis se dá o nome de espaço de resultados ou espaço amostral; - Um acontecimento é um subconjunto do espaço de resultados e que a estes resultados se dá o nome de "resultados favoráveis" à realização do acontecimento; - A descrição do fenómeno aleatório é feita através de um modelo de probabilidade, constituído pelos resultados possíveis e a probabilidade atribuída a cada resultado. • Relembrar os conceitos: acontecimento certo, impossível, elementar e composto; acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos. • Compreender que a caraterística do fenómeno aleatório permite definir, intuitivamente, a probabilidade de um acontecimento A, representada por $P(A)$, como sendo o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória, nas mesmas condições, ou seja, $P(A)$ é o valor em que estabiliza $\frac{n_A}{n}$, onde n_A representa o número de vezes que se realizou A em n repetições da experiência aleatória.	• Salientar que os modelos de probabilidade são modelos matemáticos que descrevem os fenómenos aleatórios. • Realçar que para construir um modelo de probabilidade tem que se recorrer a um processo que permita atribuir probabilidades aos acontecimentos elementares. • Iniciar o estudo deste tema com modelos de probabilidade simples, com espaços de resultados finitos, nomeadamente os que descrevem os chamados "jogos de sorte e azar". Por exemplo, intuitivamente, espera-se que ao fim de muitas repetições do lançamento do dado, cada uma das faces saia aproximadamente 16,6(6)% das vezes. Alguns acontecimentos, associados com esta experiência, são: "sair uma face com um n.º de pintas par", "sair uma face com um n.º de	• Respeitador da diferença/ do outro (A, B, E, F, H) • Sistematizador/ organizador (A, B, C, I, J) • Questionador (A, F, G, I, J) • Comunicador

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
		○ Regras da probabilidade	• Reconhecer que as probabilidades associadas aos acontecimentos elementares têm de ser números entre 0 e 1 e que a soma total deve ser 1. • Reconhecer que a probabilidade de um acontecimento é igual à soma das probabilidades dos acontecimentos elementares constituídos pelos resultados que o compõem.	pintas maior ou igual a 5", "sair uma face com um n.º de pintas maior que 6", etc. • Sugerir a elaboração de um programa em Python para simular o lançamento de um dado numerado com n faces (4, 6, 8, 12, 20).	
		○ Probabilidade da união de acontecimentos	• Utilizar a representação dos acontecimentos em diagramas de Venn, para mostrar que, dados dois acontecimentos A e B quaisquer, $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$. • Reconhecer que se admite que os acontecimentos elementares são equiprováveis quando não haja à partida razão para admitir que os resultados do espaço de resultados não tenham igual possibilidade de se verificarem.		
		○ Regra de Laplace	• Compreender que quando se puder admitir que os acontecimentos elementares são equiprováveis, se pode utilizar a regra de Laplace para determinar a probabilidade de um acontecimento A, com o seguinte enunciado: $\boldsymbol{P(A) = \frac{Número\ de\ resultados\ favoráveis\ a\ A}{Número\ de\ resultados\ possíveis}}$	• Propor a resolução de problemas que envolvam o cálculo de probabilidades recorrendo à regra de Laplace, evitando o uso excessivo de cálculo combinatório. • Realçar que uma vez definido o modelo de probabilidade se pode calcular a probabilidade de qualquer acontecimento associado ao fenómeno em estudo.	

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
	10	• Probabilidade condicionada ○ Definição ○ Regra do produto ○ Árvore de probabilidade ○ Tabelas de contingência	• Saber que a probabilidade de um acontecimento A se realizar, condicionada ou sabendo que o acontecimento B se realizou, com $P(B) > 0$, se representa por $P(A\|B)$ e se calcula de acordo com a seguinte fórmula: $\boldsymbol{P(A\|B) = P(A \cap B)\, P(B)}$ • Reconhecer que a partir da definição de probabilidade condicionada se pode definir a probabilidade simultânea de dois acontecimentos, chamada regra do produto, $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B\|A)$ ou $P(A \cap B) = P(B) \,.\, P(A\|B)$ conforme seja A ou B o acontecimento que está a condicionar. • Reconhecer a utilidade de árvores de probabilidade para organizar a informação disponível sobre os acontecimentos em cadeia.	• Alertar os alunos para o facto de que na vida real as situações mais frequentes são aquelas em que não é possível recorrer à regra de Laplace para calcular a probabilidade de acontecimentos, por exemplo: o tipo sanguíneo de uma pessoa escolhida ao acaso, de entre a população portuguesa, ou a eficácia de uma vacina. • Conduzir os alunos a reconhecerem que em muitas situações em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento, já se dispõe de alguma informação sobre o resultado da experiência, a qual permite atualizar a atribuição de probabilidade a esse acontecimento. • Exemplificar com situações intuitivas, como a extração de bolas, de vários tipos, de uma caixa sucessivamente, sem reposição, em que a composição da caixa se altera, implicando que a probabilidade de se retirar uma bola depende dos tipos de bolas que saíram nas extrações anteriores. • Pedir aos alunos que calculem a probabilidade de ocorrência de cadeias simples de acontecimentos, utilizando árvores de probabilidade, como forma de organização da informação disponível.	

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
		○ Acontecimentos independentes	• Reconhecer a utilidade das tabelas de contingência para calcular a probabilidade condicionada. • Identificar que os acontecimentos A e B, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, são independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro, ou seja, $P(A\|B) = P(A)$ (A independente de B) ou $P(B\|A) = P(B)$ (B independente de A). • Reconhecer que outra definição de independência consiste em dizer que os acontecimentos A e B são independentes se e só se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. As duas definições de independência são equivalentes desde que se exija que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.	• Salientar que uma das situações mais simples para compreender intuitivamente o conceito de independência de acontecimentos está ligada à situação do lançamento de uma moeda. A moeda "não tem memória" e a probabilidade de sair "face nacional" no próximo lançamento não depende do que saiu nos lançamentos anteriores. Porém, no acontecimento "selecionar o nome de dois alunos do sexo masculino" de uma turma com 14 rapazes e 16 raparigas, a probabilidade de selecionar o segundo rapaz, depende da escolha do primeiro aluno (seleção sem reposição). • Promover a resolução de problemas em que se obtenha a probabilidade de um certo acontecimento B, quando são conhecidas as probabilidades de B condicionadas aos acontecimentos ($A1$, $A2$, …, An), mutuamente exclusivos em que a sua união é igual ao espaço de resultados e são conhecidas as suas probabilidades, não nulas, utilizando: $\boldsymbol{P(B) = P(B\|A1).P(A1) + \cdots + P(B\|An).P(An)}$	

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
	10	• Modelos de probabilidade em espaços finitos ○ Variáveis aleatórias (discretas) ○ Função massa de probabilidade ○ Valor médio e desvio padrão populacional	• Reconhecer que se podem associar números aos resultados de um fenómeno aleatório, através de uma função denominada variável aleatória (v.a.) e que construir um modelo de probabilidade para modelar um fenómeno aleatório, com espaço de resultados finito, é equivalente a construir a função massa de probabilidade (f.m.p.) da variável aleatória associada. • Identificar a população com a variável aleatória associada e reconhecer que construir a f.m.p. é obter um modelo para a população. • Reconhecer que a f.m.p. permite calcular a probabilidade de acontecimentos, relacionados com a realização do fenómeno modelado. • Reconhecer que dois dos parâmetros, características numéricas da população, mais importantes são o valor médio (média populacional) e o desvio padrão populacional, e saber que estes parâmetros se representam pelas letras gregas μ (miu) e σ (sigma), respetivamente.	• Exemplificar e orientar os alunos na construção de modelos de probabilidade simples, nomeadamente o que descreve o resultado do lançamento de um dado equilibrado, em que se define a variável aleatória X, que associa a cada face do dado, o seu número de pintas. • Destacar a situação do lançamento de dois dados em que se pretende modelar o fenómeno aleatório que consiste em observar a soma das pintas dos dois dados e chamar a atenção para que embora o número de resultados possíveis seja igual a 11, a probabilidade de cada um não é 1/11. • Propor o cálculo do valor médio e do desvio padrão, recorrendo à f.m.p. em exemplos como o do lançamento do dado e de outros modelos, como seja, a extração de bolas de um saco com e sem reposição. • Salientar que a fórmula utilizada para calcular o valor médio é semelhante à fórmula utilizada para calcular a média com os dados discretos agrupados em tabelas de frequências relativas, destacando a interpretação frequencista da probabilidade, em que	

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
	4	• Modelo Normal ○ Propriedades	• Compreender o paralelismo entre valor médio μ e a média $\bar{x}$e também, de modo idêntico, para o desvio padrão populacional σ e desvio padrão (amostral) s, e outras medidas calculadas para a população e para a amostra. • Calcular o valor médio e o desvio-padrão populacional de uma variável aleatória de suporte finito, a partir da f.m.p. • Reconhecer o modelo ou distribuição Normal, de suporte contínuo, como um dos modelos de probabilidade mais importantes para a modelação de fenómenos aleatórios. • Identificar que as curvas que representam esta família de modelos são simétricas, com o aspeto de um sino, e que cada distribuição Normal fica definida através dos parâmetros valor médio μ e desvio padrão σ. • Saber que o valor médio determina o eixo de simetria da distribuição e que a distância entre o valor médio e as abcissas dos pontos de mudança de curvatura é igual ao desvio padrão.	as frequências relativas são interpretadas como probabilidades. • Orientar na interpretação do valor médio, utilizando exemplos associados a jogos. • Salientar que é necessário alargar o conceito de modelo de probabilidade a situações onde o espaço amostral não seja finito, como por exemplo, o "n.º de carros que passam numa determinada portagem das 8h às 9h", em que se considera como suporte do modelo os números naturais, ou o comprimento do salto de um atleta, em que o suporte da variável comprimento é $\mathbb{R}^+$. • Destacar que o modelo Normal é, dos modelos contínuos, o mais conhecido para estudar variáveis aleatórias de suporte contínuo, como, por exemplo, a "altura" ou o "peso" de um indivíduo adulto.	

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
			• Calcular probabilidades com base nesta família de modelos.	• Salientar que vários cientistas, ao trabalharem com dados, obtinham histogramas cuja população poderia ser modelada por um modelo Normal. Este modelo é a base de muitos dos processos de inferência estatística clássica. • Salientar a curva em forma de "sino" como representativa do modelo Normal, bem como o significado nessa curva dos valores da probabilidade associados a intervalos. • Utilizar a tecnologia para calcular probabilidades, com base no modelo Normal, associadas a quaisquer intervalos.	
	Tema Opcional **15**	• Primitivas imediatas e Integrais definidos ○ Áreas de figuras definidas por gráficos de funções	• Conhecer o processo de primitivação (antiderivação) como processo inverso da derivação. • Reconhecer o integral definido de uma função positiva como a área de uma região compreendida entre o gráfico da função num intervalo e o eixo das abcissas.	• Promover o cálculo de primitivas (antiderivadas) tendo por base o conhecimento das derivadas de funções elementares já estudadas. • Discutir a relação entre o valor da área abaixo do gráfico de uma função	• Conhecedor/ sabedor/ culto/ informado (A, B, G, I, J) • Criativo (A, C, D) • Crítico/Analítico (A, B, C, D, G)

	Tempos Letivos	Domínios/Temas	Aprendizagens Essenciais: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes	Ações estratégicas de ensino orientadas para o perfil dos alunos	Descritores do perfil dos alunos
		○ Teorema Fundamental do Cálculo Integral ○ Propriedades das primitivas	• Conhecer e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo Integral e a Fórmula de Barrow para calcular integrais definidos. • Calcular áreas de figuras definidas por funções contínuas e positivas usando a Fórmula de Barrow. • Provar e aplicar as seguintes propriedades das primitivas (antiderivadas): $P(k\,f) = k\,P(f)$ e $P(f+g) = P(f) + P(g)$ generalizadas aos integrais. • Construir uma tabela de primitivas simples, envolvendo funções polinomiais, $1/x$, e^x , $sen(x)$ e $cos(x)$. • Usar exclusivamente primitivas de combinações lineares das funções da tabela referida anteriormente.	contínua e positiva e a sua primitiva, para introduzir o Teorema Fundamental do Cálculo Integral. • Propor a determinação de áreas limitadas por gráficos de funções contínuas e positivas nos casos em que se conhece a primitiva. • Propor a elaboração de um programa em Python para aproximar o valor de um integral. • Conduzir os alunos à formulação das propriedades das primitivas (antiderivadas) tendo por base o conhecimento das propriedades das derivadas. • Propor a construção de uma tabela de primitivas a partir da definição de primitiva, como por exemplo a seguinte:	• Indagador/ Investigador (C, D, F, H, I) • Respeitador da diferença/ do outro (A, B, E, F, H) • Sistematizador/ organizador (A, B, C, I, J) • Questionador (A, F, G, I, J) • Comunicador

Função	Primitiva
k	$kx + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$ln\|x\| + C$
$sen(x)$	$-cos\,(x) + C$
$cos\,(x)$	$sen(x) + C$

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO PERFIL DOS ALUNOS:

A - LINGUAGENS E TEXTOS; B - INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO; C - RACIOCÍNIO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS; D - PENSAMENTO CRÍTICO E PENSAMENTO CRIATIVO; E - RELACIONAMENTO INTERPESSOAL; F - DESENVOLVIMENTO PESSOAL E AUTONOMIA; G - BEM-ESTAR, SAÚDE E AMBIENTE; H - SENSIBILIDADE ESTÉTICA E ARTÍSTICA; I - SABER CIENTÍFICO, TÉCNICO E TECNOLÓGICO; J - CONSCIÊNCIA E DOMÍNIO DO CORPO.

Ideias chave das Aprendizagens Essenciais:

Resolução de problemas, modelação e conexões; raciocínio e lógica matemática; comunicação matemática; recurso sistemático à tecnologia; tarefas e recursos educativos; História da Matemática; práticas enriquecedoras e criatividade; organização do trabalho.